Открытая олимпиада ФМЛ 239.

23 марта 2014 г.

8-9 классы.

1. Петя и Вася играют в игру. Мальчики по очереди (начинает Петя) отмечают натуральные числа, не превосходящие 1000. Запрешается отмечать любое уже отмеченное число, а также любое число, отличающееся от какого-то отмеченного на 1 или дающее в сумме с каким-то отмеченным 1001. Тот, кто не имеет хода, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

2. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Точки O_A, O_B, O_C, O_D — центры описанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB, ABC соответственно. Известно, что $O_AO_BO_CO_D$ — выпуклый четыреухгольник три стороны которого равны. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

3. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a + b + ab = c^2$. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди чисел a, b, c?

4. Дан граф, все вершины которого имеют степень 3. Известно, что для любой вершины хотя бы две из трёх смежных с ней вершин соединены ребром. Докажите, что вершины можно разбить на пары смежных.

5. AA' — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Вписанная окружность этого треугольника с центром I касается его сторон AB, AC, BC в точках P, Q, R соответственно. Прямая $A'I$ пересекает отрезок PQ в точке T. Докажите, что $RT \perp PQ$.

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна трём. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + 3 \leqslant \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca}.$$

7. Натуральное число будем называть *хорошим*, если его можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел, каждое из которые раскладывается в произведение нечётного количества простых чисел (не обязательно различных). Докажите, что существует бесконечно много хороших кубов натуральных чисел.

8. Дан квадрат $k \times k$. Его клетки красят в k цветов так, что в каждой строчке и каждом столбце цвета всех клеток разные. Никакие четыре клетки, лежащие на пересечении любых двух строк и двух столбцов, не могут быть покрашены ровно в три цвета. Чему может быть равно k?

Открытая олимпиада ФМЛ 239.

23 марта 2014 г.

10-11 классы.

1. Петя и Вася играют в игру. Мальчики по очереди (начинает Петя) отмечают натуральные числа, не превосходящие 1000. Запрешается отмечать любое уже отмеченное число, а также любое число, отличающееся от какого-то отмеченного на 1 или дающее в сумме с каким-то отмеченным 1001. Тот, кто не имеет хода, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

2. Многочлен $P(x)$ четвёртой степени таков, что уравнение $P(x) = x$ имеет 4 корня, а любое уравнение вида $P(x) = c$ — не больше двух. Докажите, что уравнение $P(x) = -x$ также имеет не больше двух корней.

3. Натуральное число будем называть *хорошим*, если его можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел, первое из которых раскладывается в произведение нечётного количества простых чисел (не обязательно различных), а второе — чётного. Докажите, что существует бесконечно много хороших четвёртых степеней натуральных чисел.

4. Медиана CM треугольника ABC равна биссектрисе BL, $\angle BAC = 2\angle ACM$. Докажите, что треугольник правильный.

5. Дан квадрат $k \times k$. Его клетки красят в k цветов так, что в каждой строчке и каждом столбце цвета всех клеток разные. Никакие четыре клетки, лежащие на пересечении любых двух строк и двух столбцов, не могут быть покрашены ровно в три цвета. Чему может быть равно k?

6. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1^2 + 2a_2^3 + \cdots + na_n^{n+1} < 1$. Докажите, что $2a_1 + 3a_2^2 + \cdots + (n+1)a_n^n < 3$.

7. Внутри треугольника ABC задана окружность. Из точки A к этой окружности провели две касательные, которые пересекают сторону BC в точках A_1 и A_2. Точки B_1, B_2, C_1, C_2 определяются аналогично. Известно, что пять из этих шести точек лежат на одной окружности. Докажите, что шестая точка также лежит на этой окружности.

8. Дано натуральное $n > 1000$. Докажите, что на рёбрах полного графа на n вершинах можно расставить числа $1, 2, \ldots, C_n^2$ по одному разу так, чтобы на любом (возможно, замкнутом) пути из 3 рёбер сумма чисел была не меньше $3n - 1000\log_2(\log_2 n)$.