Открытая олимпиада ФМЛ 239.

24 марта 2019 г.

8-9 классы.

1. На острове рыцарей и лжецов прошёл турнир по теннису, в котором участвовало 100 островитян. Каждые двое играли ровно 1 раз. После турнира каждый из участников заявил: “я обыграл столько же рыцарей, сколько и лжецов”, при этом все рыцари сказали правду, а все лжецы солгали. Какое наибольшее число рыцарей могло участвовать в турнире?

2. Верно ли, что существует 130 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет ровно 900 натуральных делителей?

3. Окружность ω касается стороны AC правильного треугольника ABC в точке D, а его описанной окружности — в точке E, лежащей на дуге BC. Докажите, что из отрезков AD, BE и CD можно составить треугольник, у которого разность каких-то двух углов равна $60°$.

4. Из таблицы 20×20 склеили тор. В какой-то клетке этой доски спрятан клад. За один вопрос можно выделить на этом торе прямоугольник 1×4 или 4×1 и выяснить, есть ли клад в этом прямоугольнике. Ответы на все вопросы абсолютно правдивы, зато даются только после того, как они все заданы. Какого наименьшего количества вопросов заведомо хватит, чтобы точно найти клад? (Если описывать положение клетки в торической таблице номерами (i, j) строки и столбца, $1 \leqslant i, j \leqslant 20$, то две клетки соседние, если какие-то две координаты у них совпадают, а две другие отличаются на 1 по модулю 20).

5. Назовем упорядоченный набор различных натуральных чисел хорошим, если для любых двух чисел в нем большее делится на меньшее. Докажите, что число $(n+1)!-1$ можно представить в виде $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — хороший набор, не менее чем $n!$ способами.

6. Радиус описанной окружности остроугольного треугольника равен 23, а радиус вписанной равен 9. Общие внешние касательные к его вневписанным окружностям, отличные от прямых, содержащих стороны исходного треугольника, образуют треугольник. Найдите радиус его вписанной окружности.

7. Даны положительные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$. Пусть m_k — максимум из произведений $a_i b_j c_l$ по наборам (i, j, l), для которых $\max(i, j, l) = k$. Докажите, что

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)(c_1 + \cdots + c_n) \leqslant n^2(m_1 + \cdots + m_n).$$

8. В лаборатории имеется n приборов, каждые два из них могут быть соединены проводом. При этом если для четырёх приборов A, B, C, D проводами соединены пары AB, BC, CD, а пары CA, AD, DB — нет, то происходит коллапс. Профессор придумал схему соединения проводов, при которой коллапса не происходит. Придя в лабораторию, он обнаружил, что коллапса пока не происходит, но соединены приборы не по его схеме. Докажите, что он может реализовать свою схему, последовательно соединяя или разъединяя пары приборов, так, что коллапса ни в какой момент не произойдёт.

Открытая олимпиада ФМЛ 239.

24 марта 2019 г.

10-11 классы.

1. На доску выписаны дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \ldots, \frac{n}{1}$, где n — натуральное число. Двоечник Вася посчитал все модули разностей соседних чисел в этом ряду и нашел среди них 10000 дробей вида $\frac{1}{k}$ (с натуральными k). Докажите, что он может найти ещё не менее 5000 таких разностей.

2. В квадрате 100×100 отмечено несколько клеток. Вася хочет разбить квадрат на несколько прямоугольников таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике было не более двух отмеченных клеток и было не более k прямоугольников, в которых отмечено менее двух клеток. При каком наименьшем k Вася заведомо сможет так сделать?

3. Радиус описанной окружности остроугольного треугольника равен 23, а радиус вписанной равен 9. Общие внешние касательные к его вневписанным окружностям, отличные от прямых, содержащих стороны исходного треугольника, образуют треугольник. Найдите радиус его вписанной окружности.

4. За круглым столом сидят $n > 1000$ человек. Некоторые из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут, причём среди сидящих есть лжецы. Каждый из сидящих произнёс фразу: “среди следующих 20 сидящих от меня по часовой стрелке столько же рыцарей, сколько и среди следующих 20 сидящих от меня против часовой стрелки”. При каких n такое могло случиться?

5. Окружность Γ касается описанной окружности треугольника ABC в точке R, а также его сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Лучи PQ и BC пересекаются в точке X. Касательная в точке R к окружности Γ пересекает отрезок QX в точке Y. Отрезок AX пересекает описанную окружность треугольника APQ в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

6. Найдите все функции $f\colon (0;+\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:
(i) $f(x) + f(1/x) = 1$ для всех $x > 0$;
(ii) $f(xy + x + y) = f(x)f(y)$ для всех $x, y > 0$.

7. Даны положительные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$. Пусть m_k — максимум из произведений $a_i b_j c_l$ по наборам (i, j, l), для которых $\max(i, j, l) = k$. Докажите, что

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)(c_1 + \cdots + c_n) \leqslant n^2(m_1 + \cdots + m_n).$$

8. Дано натуральное число $k > 1$. Докажите, что если через любое ребро графа G проходит менее $[e(k-1)! - 1]$ простых циклов, то вершины этого графа можно правильно раскрасить в k цветов.